Μάθημα 6° 31/10/2017

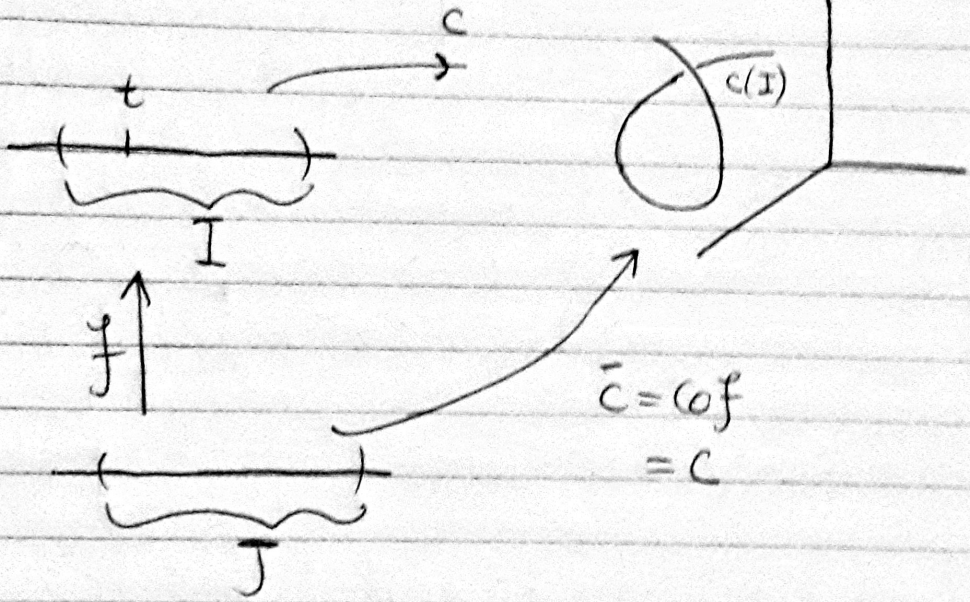
Καμπυλότητα Καμπυλών του $\mathbb{R}^3$

• Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος $s \in I$. Η καμπυλότητα της είναι η συνάρτηση $k: I \to [0, +\infty)$

$$k(s) = \|\ddot{c}(s)\|$$

Καμπύλες με τυχούσα παράμετρο

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $t \in I$ $\quad s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du$



$\bar{c} = c \circ f$
$= c$

$\frac{ds}{dt} = \|c'\| > 0 \Rightarrow s = s(t)$ αντιστρέφεται με αντίστροφη $f: J \to I$, $t = f(s) = t(s)$

Η αναπαραμετροποίηση με παράμετρο το μήκος τόξου είναι η $\boxed{\bar{c} = c \circ f}$

Η $\bar{c}$ έχει καμπυλότητα $\bar{k}: J \to [0, \infty)$

$\boxed{\text{Ορισμός}}$ Καλούμε καμπυλότητα της $c(t)$, $t \in I$, τη συνάρτηση $k: I \to [0, +\infty)$

$k(t) = \bar{k}(s(t)) \quad \forall\, t \in I$

$\boxed{k = \bar{k} \circ s}$

$k = \|\ddot{c}\|$, $\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt} \Rightarrow \boxed{\dot{c} = \frac{dt}{ds} c'}$

$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|c'\|}$

$\boxed{\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2} c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''}$

$<\dot{c}, \dot{c}> = 1 \Rightarrow <\dot{c}, \dot{c}>^{\cdot} = 0$
$\Rightarrow 2<\ddot{c}, \dot{c}> = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{c} \perp \ddot{c}}$

$\|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2 = \|\dot{c}\|^2 \|\ddot{c}\|^2 - \cancelto{0}{<\dot{c}, \ddot{c}>^2}$

$\Rightarrow \|\dot{c} \times \ddot{c}\| = \|\ddot{c}\| \Rightarrow k = \|\ddot{c}\| = \|\dot{c} \times \ddot{c}\|$

$k = \|\dot{c} \times \ddot{c}\| = \left\| \frac{dt}{ds} c' \times \left(\frac{d^2t}{ds^2} c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c'' \right) \right\| =$

$= \left\| \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c' \times c'' \right\| = \left\| \frac{1}{\|c'\|^3} c' \times c'' \right\|$

Πρόταση

Η καμπυλότητα κάθε κανονικής καμπύλης $c: I \to \mathbb{R}^3$ είναι η συνάρτηση

$$k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}$$

<u>Ένα σημαντικό παράδειγμα</u>

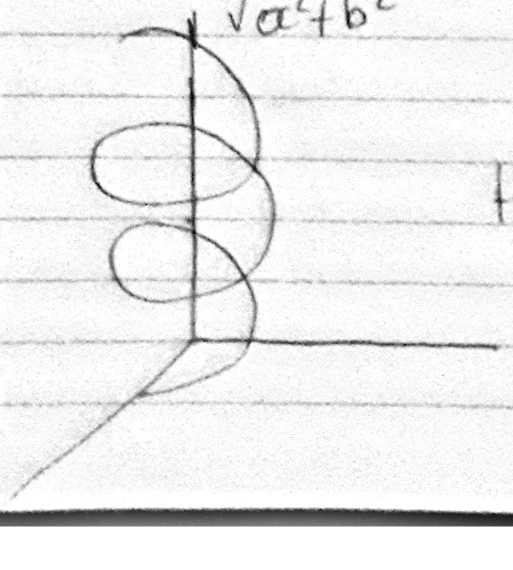
Θεωρούμε την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $c(t) = (\alpha\cos t, \alpha\sin t, bt)$, $\alpha > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (-\alpha\sin t, \alpha\cos t, b)$, $\|c'(t)\| = \sqrt{\alpha^2+b^2} > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Άρα η c είναι κανονική. Η καμπυλότητά της είναι η συνάρτηση $k = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}$, $c''(t) = (-\alpha\cos t, -\alpha\sin t, 0)$

$$c'(t) \times c''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\alpha\sin t & \alpha\cos t & b \\ -\alpha\cos t & -\alpha\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

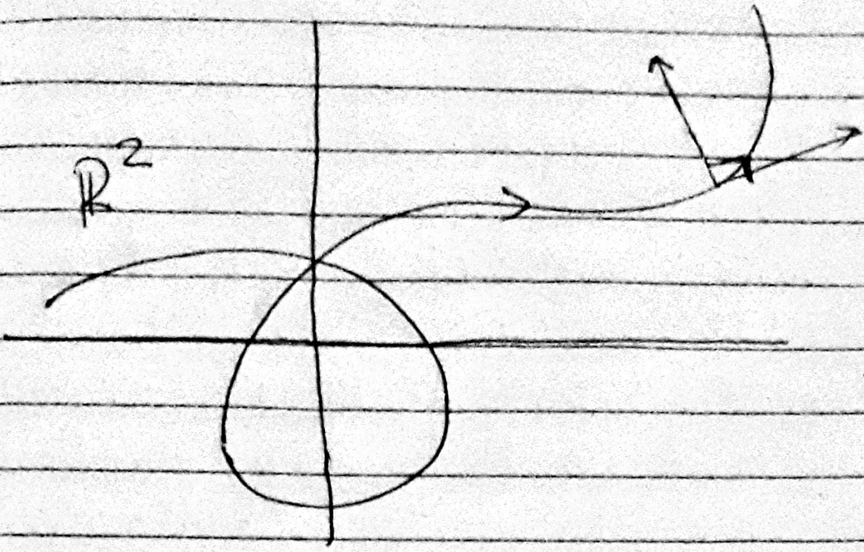
$$c'(t) \times c''(t) = (\alpha b\sin t, -\alpha b\cos t, \alpha^2) = \alpha(b\sin t, -b\cos t, \alpha)$$

$$\|c'(t) \times c''(t)\| = \alpha\sqrt{b^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t + \alpha^2} = \alpha\sqrt{\alpha^2+b^2}$$

$$k(t) = \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2+b^2}}{\sqrt{\alpha^2+b^2}^{\,3}} \Rightarrow \boxed{k(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2+b^2}}$$



Η καμπύλη $c(t) = (\alpha\cos t, \alpha\sin t, bt)$ για $b \neq 0$ καλείται κυλινδρική έλικα



$$\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$$

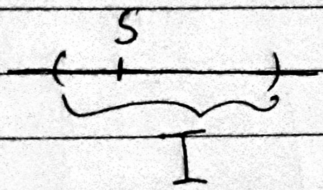
$$\vec{t}(s) = \dot{c}(s)$$

$$\dot{\vec{t}} = \kappa \vec{n}$$

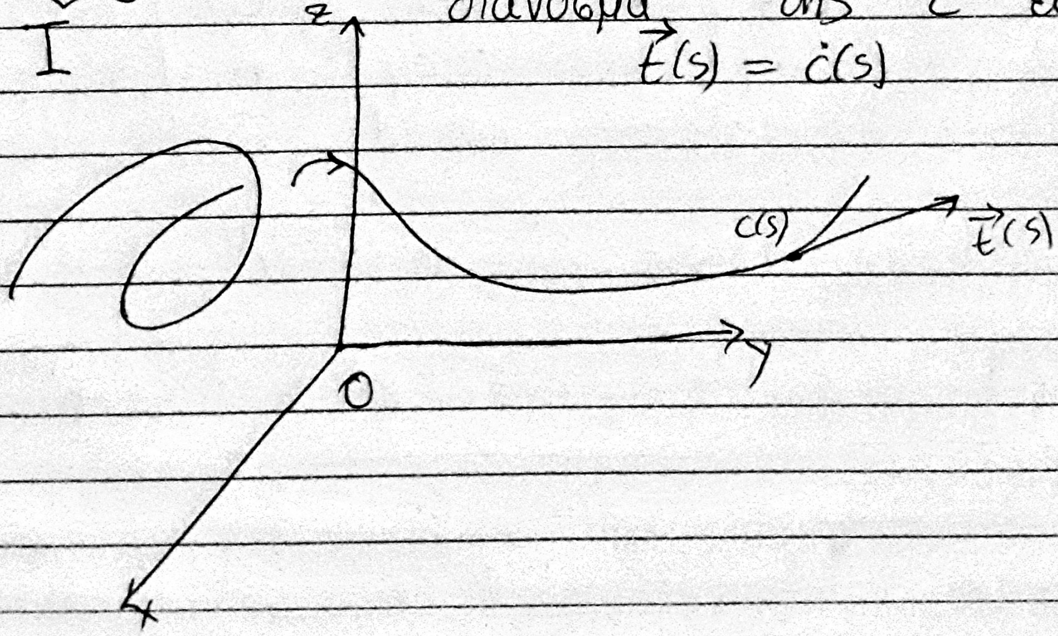
$$\dot{\vec{n}} = -\kappa \vec{t}$$

Πλαίσιο Frenet για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$

Έστω $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$



Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της c είναι το
$$\vec{t}(s) = \dot{c}(s)$$



$$\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle = 1 \Rightarrow \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle^{\cdot} = 0 \Rightarrow 2\langle \dot{\vec{t}}, \vec{t} \rangle = 0 \Rightarrow \dot{\vec{t}} \perp \vec{t}$$

$$\dot{\vec{t}} = \ddot{c} \quad , \quad \|\dot{\vec{t}}\| = \|\ddot{c}\| = \kappa$$

ΥΠΟΘΕΣΗ Υποθέτω για καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ ότι $k>0$ ΠΑΝΤΟΥ

Ορισμός

Για καμπύλες με παράμετρο το μήκος s και καμπυλότητα $k(s)>0$, $\forall s\in I$ ορίζεται το κύριο κάθετο ως το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{n}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{\|\dot{\vec{t}}\|} = \frac{\ddot{c}(s)}{k(s)}$$ Προφανώς: $\vec{n}(s)\perp\vec{t}(s)$

Το 2^{o} κάθετο διάνυσμα της καμπύλης είναι το

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s)\times\vec{n}(s)$$

$$\|b\|^2 = \|\vec{t}(s)\times\vec{n}(s)\|^2 = \|\vec{t}(s)\|^2\|\vec{n}(s)\|^2 - \cancelto{0}{\langle\vec{t}(s),\vec{n}(s)\rangle^2}$$

Συμπέρασμα $\forall\, s\in I$, $\{\vec{t}(s),\vec{n}(s),\vec{b}(s)\}$ είναι δεξιόστροφη ορθομοναδιαία βάση, το καλούμενο <u>πλαίσιο Frenet</u>

Πώς μεταβάλλεται το πλαίσιο Frenet ??

Υπολογίζω τις παραγώγους·

$$\dot{\vec{t}} = \langle\dot{\vec{t}},t\rangle\vec{t} + \langle\dot{\vec{t}},\vec{n}\rangle + \langle\dot{\vec{t}},\vec{b}\rangle\vec{b}$$

$$\dot{\vec{n}} = \langle\dot{\vec{n}},t\rangle\vec{t} + \cancelto{0}{\langle\dot{\vec{n}},\vec{n}\rangle} + \langle\dot{\vec{n}},\vec{b}\rangle\vec{b}$$

$$\dot{\vec{b}} = \langle\dot{\vec{b}},\vec{t}\rangle\vec{t} + \langle\dot{\vec{b}},\vec{n}\rangle + \langle\dot{\vec{b}},\vec{b}\rangle\vec{b}$$

$\vec{t} = \dot{c}$
$\vec{n} = \dot{\vec{t}}/k \Rightarrow$
$\vec{b} = \vec{t}\times\vec{n}$
$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{t}} = k\vec{n}}$

$$\begin{cases} \dot{\vec{t}} = k\vec{n} \\ \dot{\vec{n}} = -k\vec{t} + \\ \dot{\vec{b}} = -\tau\vec{n} \end{cases} \qquad \tau = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \rangle$$

$$\langle \dot{\vec{n}}, \vec{t} \rangle = \cancelto{0}{\left(\langle \vec{n}, \vec{t} \rangle\right)^{\cdot}} - \langle \vec{n}, \dot{\vec{t}} \rangle = -k$$

$$\langle \dot{\vec{n}}, n \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle\right)^{\cdot} = 0$$

$$\langle \dot{\vec{b}}, \vec{n} \rangle = \left(\langle \vec{b}, \vec{n} \rangle\right)^{\cdot} - \langle \vec{b}, \dot{\vec{n}} \rangle = -\langle \vec{b}, -k\vec{t} + \tau\vec{b} \rangle = -\tau$$

Ορισμός Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$ και καμπυλότητα $k(s) > 0$ $\forall s \in I$. Καλούμε στρέψη της c την συνάρτηση $\tau: I \to \mathbb{R}$

$$\tau(s) = \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{b}(s) \rangle$$

Ισοδύναμα, οι εξισώσεις Frenet γράφονται:

$$\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{t}}{k} \Rightarrow \vec{n} = \frac{\ddot{c}}{k} \Rightarrow \dot{\vec{n}} = \left(\frac{1}{k}\ddot{c}\right)^{\cdot} = -\frac{\dot{k}}{k^2}\ddot{c} + \frac{1}{k}\dddot{c}$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \dot{c} \times \left(\frac{\ddot{c}}{k}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{b} = \frac{1}{k}\dot{c} \times \ddot{c}}$$

$$\tau = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \rangle = \left\langle -\frac{\dot{k}}{k^2}\ddot{c} + \frac{1}{k}\dddot{c}, \frac{1}{k}\dot{c} \times \ddot{c} \right\rangle = \frac{\langle \dot{c} \times \ddot{c}, \dddot{c} \rangle}{k^2}$$

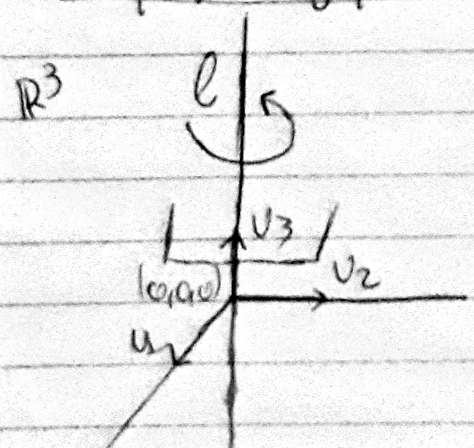
Αν c καμπύλη με φυσική παράμετρο και καμπυλότητα $k(s) > 0$ $\forall s \in I$ τότε η στρέψη της είναι

$$\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{k^2}$$

Ισομετρίες του $\mathbb{R}^3$

$$T \in Isom(\mathbb{R}^3) \Rightarrow T = T_v \circ A, \quad A \in O(3)$$

• Στροφές γύρω από άξονα



Έστω ℓ μονοδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Θεωρώ ορθομοναδιαία δεξιόστροφη βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ όπου το v_3 είναι βάση του ℓ. Καλούμε στροφή γύρω από τον άξονα του γραμμικού μετασχηματισμό του $\mathbb{R}^3$ με πίνακα

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ως προς τη βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$

· Θεωρούμε τον γραμμ μετασχ με πίνακα

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Έστω $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλες γεωμετρικώς ισότιμες με παράμετρο το μήκος τόξου s και καμπυλότητα

$\tilde{k}(s) = k(s) > 0 \quad \forall \; s \in I$

$\tau = \dfrac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{k^2}$, $\tilde{\tau} = \dfrac{[\dot{\tilde{c}}, \ddot{\tilde{c}}, \dddot{\tilde{c}}]}{\tilde{k}^2}$

$\tilde{c} = T \circ c$, $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$, $T = T_v \circ A$

$\dot{\tilde{c}} = A\dot{c}$, $\ddot{\tilde{c}} = A\ddot{c}$, $\dddot{\tilde{c}} = A\dddot{c}$

$[\dot{\tilde{c}}, \ddot{\tilde{c}}, \dddot{\tilde{c}}] = [A\dot{c}, A\ddot{c}, A\dddot{c}] = \det A \, [\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]$

$\tilde{\tau} = \det A \, \tau = \pm \tau$

$\bar{s} = -s$, $\bar{c} = c \circ f$, $f(s) = -s$

$$\frac{d\bar{c}}{d\bar{s}} = \frac{ds}{d\bar{s}}\frac{dc}{ds} \Rightarrow \boxed{\frac{d\bar{c}}{d\bar{s}} = -\dot{c}} \Rightarrow \left\|\frac{d\bar{c}}{d\bar{s}}\right\| = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\bar{s}$ = μήκος τόξου.

$$\frac{d^2\bar{c}}{d\bar{s}^2} = -\frac{d\dot{c}}{d\bar{s}} = -\frac{ds}{d\bar{s}}\frac{d\dot{c}}{ds} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\bar{c}}{d\bar{s}^2} = \ddot{c}} \Rightarrow \frac{d^3\bar{c}}{d\bar{s}^3} = -\dddot{c}$$

Στρέψη Καμπυλών με τυχαία παράμετρο

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με καμπυλότητα $k(t) > 0$ $\forall t \in I$

Θεωρώ την αναπαραμετρικοποίηση $\bar{c} = c \circ f$ της c με παράμετρο το μήκος τόξου

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du, \quad \frac{ds}{dt} = \|c'\| > 0 \Rightarrow t = f(s)$$

Ορίζουμε στρέψη της καμπύλης c την συνάρτηση $\tau: I \to \mathbb{R}$ με $\tau(t) = \bar{T}(s(t))$, όπου $\bar{T}$ είναι η στρέψη της $\bar{c}$

$$\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{k^2}, \quad k = \|\ddot{c}\| = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3}$$

$$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt} \Rightarrow \boxed{\dot{c} = \frac{dt}{ds} c'}$$

$$\boxed{\ddot{c} = \frac{d^2t}{ds^2} c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''}$$

$$\dddot{c} = \frac{d^3t}{ds^3} c' + \frac{d^2t}{ds^2}\frac{dc'}{ds} + 2\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{dc''}{ds}$$

$$\dddot{c} = \frac{d^3t}{ds^3} c' + 3\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c'''$$

$$\tau = \frac{[\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c}]}{k^2} = \frac{\left[\frac{dt}{ds}c', \frac{d^2t}{ds^2}c' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c'', \frac{d^3t}{ds^3}c' + 3\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}c'' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 c'''\right]}{\frac{\|c'\times c''\|^2}{\|c'\|^6}}$$

$$= \frac{\|c'\|^6}{\|c'\times c''\|^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 [c', c'', c''']$$

Πρόταση

Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη κανονική με παράμετρο t και καμπυλότητα $k(t) > 0$ $\forall\, t \in I$. Τότε η στρέψη της είναι:

$$\tau = \frac{[c', c'', c''']}{\|c'\times c''\|^2} \qquad \vec{n} = \vec{b}\times\vec{t}$$

$$\vec{t} = \dot{c} = \frac{dt}{ds} c' \Rightarrow \boxed{\vec{t} = \frac{c'}{\|c'\|}} \qquad \boxed{\vec{b} = \frac{c'\times c''}{\|c'\times c''\|}}$$

$$\vec{b} = \vec{t}\times\vec{n} = \frac{c'}{\|c'\|}\times\frac{\dot{\vec{t}}}{k} = \frac{c'\times\ddot{c}}{\|c'\| k} = \frac{c'\times\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 c''}{\|c'\| k}$$

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΙΑ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^3$

(i) <u>Υπαρξη</u>: Για τυχούσες συνεχείς συναρτήσεις $k, \tau : I \to \mathbb{R}$ ώστε $k(s) > 0$ $\forall\, s \in I$ $\exists$ C^3 καμπύλη $c : I \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ καμπυλότητα και στρέψη της δοθείσας συναρτήσεις k, τ αντίστοιχα.

(ii) Εστω $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλες με κοινή παράμετρο μήκος τόξου "s" καμπυλότητας k, $\tilde{k}$ στρέψη $\tau, \tilde{\tau}$. Αν $k(s) = \tilde{k}(s) > 0$ $\forall\, s \in I$ και $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$ $\forall\, s \in I$ τότε οι $c, \tilde{c}$ είναι γεωμετρικά ισότιμες, δηλαδή $\exists$ ισομετρία T του $\mathbb{R}^3$ η οποία διατηρεί τον προσανατολισμό ώστε

$$\tilde{c} = T \circ c$$

<u>π.χ.</u> $\tau = \dfrac{[c', c'', c''']}{\|c' \times c''\|^2}$ Θεωρώ την κυλινδρική έλικα $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$

$\tau = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$, η στρέψη είναι ΣΤΑΘΕΡΗ

"ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ"

Ορισμός

Μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ καλείται επίπεδη αν-ν η εικόνα της περιέχεται σε κάποιο επίπεδο

Εστω $c : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο και καμπυλότητα $k(s) > 0$ $\forall\, s \in I$, $c(s) = (x(s), y(s), z(s))$

Υποθέτω ότι η c είναι επίπεδη $c(I) \subset \Pi$

(Π) $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$
$(A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$

$Ax(s) + By(s) + \Gamma z(s) = -\Delta$

$\Leftrightarrow \langle c(s), w \rangle = -\Delta \quad \forall s$
$w = (A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$

$\langle \dot{c}(s), w \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{t}, w \rangle = 0$

$\langle \ddot{c}(s), w \rangle = 0$

$\kappa(s) \langle \vec{n}(s), w \rangle = 0 \quad \forall s$

$$\begin{cases} \ddot{c} = \dot{\vec{t}} = \kappa \vec{n} \\ \dot{\vec{b}} = -\tau \vec{n} \end{cases}$$

$\Rightarrow \langle \vec{n}(s), w \rangle = 0$

$\Rightarrow \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \pm \dfrac{w}{\|w\|} \Rightarrow \dot{\vec{b}} = 0$

$\Rightarrow \tau = 0$

$\kappa(s) > 0 \quad \forall s$ και $\tau(s) = 0 \quad \forall s$

$\dot{\vec{b}}(s) = -\tau(s) \vec{n}(s) = 0 \Rightarrow \vec{b}(s) =$ σταθ $= w$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(s) = \langle c(s), w \rangle$

$\dot{f}(s) = \langle \dot{c}(s), w \rangle = \langle \vec{t}(s), \vec{b}(s) \rangle = 0$

$\Rightarrow f(S) = \alpha = \text{σταθ.} \Leftrightarrow \langle C(S), w \rangle = \alpha$

$A x + B y + \Gamma z = a, \quad (A, B, \Gamma) = \alpha$